CSERVENYÁK JÁNOS

EGY KÖZÉPISKOLAI GEOMETRIAI KÍSÉRLET ÖSSZEFOGLALÁSA 1. RÉSZ

AZ EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK. A VEKTOROK.

Néhány évvel ezelőtt az általános iskolai oktatásban polgárjogot nyert a geometria transzformációkkal történő feldolgozása. A 6. osztályban elkezdődik a transzformáció fogalmának kialakítása "Keresd a párját" című fejezetben. Többféle hozzárendelési eljárást vizsgálnak, amelyek közül kiválasztják a tengelyes tükrözést, a középpontos türközést, az eltolást, forgást, tehát az egy és két tengelyű tükrözéseket és ezek segítségével vizsgálják a geometriai alakzatok tulajdonságait. Az ezen eljárásokkal egymásba átvitt alakzatokat, vagyis a síkbeli vagy térbeli mozgásokkal egymásba átvitt alakzatokat egybevágóknak nevezik. Tovább nem lépnek. Egyrészt nem adják meg a transzformáció általános értelmezését, másrészt a kettőnél több tengelyre vonatkozó tükrözésről nem beszélnek.

Jogos ez, hiszen a tanulókat általános fogalmakkal még nem szerencsés terhelni. Sor kerül még a vektor fogalmának megadására is, mégpedig az eltolásnál a pontokat a képeikkel összekötő nyilak összességeként. A 8. osztályban viszont a középpontos hasonlóságot, mint geometriai transzformációt értelmezik.

Természetesen felvetődik a kérdés, hogy kellene és lehetne a transzformációs szemfeleletet a középiskolában továbbfejleszteni, kiteljesíteni.
Úgy gondoltuk, hogy az általános iskolai geometria tananyaga jó alapot nyújt arra, hogy az egybevágósági transzformációknak egy a foglamakat értelmező, rendszeresebb, általánosabb, teljes összefoglalását készítsük el a középiskolai tanulók számára. Ezért is fogtunk hozzá az egri Dobó Gimnáziumban egy kísérlethez, amelyben elképzeléseinket igyekeztünk megvalósítani. Előbb a geometriai leképezések és transzformációk általános értelmezését végeztük el, majd megadtunk egy konkrét leképezést a síkon, amelynek tulajdonságait vizsgálva egyrészt az általános fogalmak konkrétumokkal való megtöltését végeztük el, másrészt kiépítettük vele az egybevágósági transzformációk rendszerét, és ezekkel vizsgáltuk a geometriai alakzatok tulajdonságait. Helyszűke miatt csak a geometriai leképezések és transzformációk fogalomrendszerét, valamint a szóbahozott konkrét leképezés ismertetését végezzük el részletesen. A tananyag további részeinek csak az összefoglalását adjuk és a szemléleti vonatkozásait említjük.

<u>Geometriai leképezések és transzformációk</u>

Tekintsük a nem szükségképpen különböző A és B ponthalmazt.

<u>Értelmezések:</u>

Egy A ponthalmaznak egy B ponthalmazba történő F <u>geometriai leképezésén</u> olyan előírást értünk, amely az A ponthalmaz minden egyes P pontjához a B ponthalmaz valamely P' pontját rendeli. A P pontot <u>eredeti pontnak,</u> a P' pontot <u>képpontnak,</u> a P kezdőpontú P'-be mutató nyilat <u>leképezési nyilnak</u>

nevezzük. Továbbá az A ponthalmazt a geometriai leképezés értelmezési tartományának, a képpontok (P'-k) halmazát a geometriai leképezés értékkészletének vagy képhalmazának nevezzük.

Ha a képhalmaz a B valódi részhalmaza, akkor azt mondjuk, hogy az A ponthalmazt a B ponthalmazba képezzük le, ha a képhalmaz éppen a B ponthalmaz, akkor A-t a B-re képezzük le.

Ha a képhalmaz A valódi részhalmaza, akkor A-t A-ba (önmagába) képezzük le, s ha a képhalmaz éppen A, akkor A-t A-ra (önmagára) képezzük le.

Ha egy A ponthalmaznak önmagába vagy önmagára való leképezésénél egy pont képe önmaga, vagyis P = F(P), akkor a P pontot a leképezés fixpontjának nevezzük.

Ha egy A ponthalmaz e egyenese pontjainak képei az e egyenesre illeszkednek, akkor az e egyenest a geometriai leképezés invariáns egyenesének nevezzük.

Ha pedig egy A ponthalmaz α síkja pontjainak képei az α síkra illeszkednek, akkor az α síkot a geometriai leképezés invariáns síkjának nevezzük.

Ha az invariáns egyenes minden pontja fixpont, akkor az egyenest pontonként fixegyenesnek, ha az invariáns sík minden pontja fixpont, akkor azt pontonként fix síknak nevezzük.

Ha az F leképezés esetén egyenes képe egyenes, akkor az F leképezést egyenestartónak, ha sík képe sík, akkor síktartónak nevezzük.

Ha az A ponthalmaznak a B ponthalmazra való leképezésénél különböző P és Q pontok P' és Q' képei is különbözők, akkor ezt a geometriai leképezést kölcsönösen egyértelmű leképezésnek vagy transzformációnak nevezzük. Jele: T.

A T transzformációnál B minden egyes pontja A egyetlen pontjának képe. Ha most a képpontokhoz az eredeti pontokat rendeljük hozzá, akkor B-nek A-ra való transzformációját értelmezzük. Ezt a T transzformáció inverzének nevezzük. Jele: T^{-1} .

Leképezések összetétele

Legyen A, B, C három nem szükségképpen különböző ponthalmaz. Képezze le F_1 leképezés A-t a B-be, F_2 leképezés B-t a C-be.
Az F_1 és F_2 leképezések egymás utáni alkalmazásával A-t a C-be képezzük le.

Értelmezés: Az F_1 és F_2 leképezések egymás utáni alkalmazását az F_1 és F_2 leképezések összetételének vagy szorzatának nevezzük.
Jele: F_2F_1 . $(P'' = F_2(P') = F_2F_1(P)$, ahol P az A, P' a B és P'' a C ponthalmaz eleme.)

Értelmezés: Az olyan leképezést (vagy leképezések összetételét), amelynél minden pont fixpont azonos vagy identikus leképezésnek nevezzük. Jele: I.

Értelmezés: Az F_1 és F_2 leképezéseket (akár összetett leképezéseket is) akkor nevezzük egyenlőknek, ha minden $P \in A$-ra $F_1(P)=F_2(P)$, ahol $F_1(P), F_2(P) \in B$.
Jele: $F_1 = F_2$.

Transzformációcsoport. (Olvasmány)

Képezze le F_1 az A-t B-be, F_2 a B-t C-be, F_3 a C-t D-be, ahol A,B,C,D ponthalmazok.

Az F_2F_1 szorzatleképezés P-hez P''-t az F_3 P''-höz P'''-t rendeli, vagyis az $F_3(F_2F_1)$ szorzatleképezés a P-hez a P'''-t rendeli.

Az F_1 leképezés P-hez P'-t, az F_3F_2 szorzatleképezés a P'-höz a P'''-t rendeli, vagyis az $(F_3F_2)F_1$ szorzatleképezés a P-hez ugyancsak a P'''-t rendeli. A két leképezés tehát egyenlő, vagyis

$$F_3(F_2F_1) = (F_3F_2)F_1 ,$$

ami azt jelenti, hogy a leképezések szorzata csoportosítható: másképpen a leképezések szorzata asszociatív tulajdonsággal rendelkezik.

Tekintsük egy A ponthalmaz önmagára történő transzformációinak összességét. Ezekre az alábbi tulajdonságok érvényesek:

- Ha T_i és T_j az összességbeli két tetszőleges transzformáció, akkor a T_iT_j szorzat is az összességhez tartozik, vagyis transzformáció.
- E szorzatra fennáll a $(T_iT_j)T_k = T_i(T_jT_k)$ tulajdonság. (Asszociatív)
- A transzformációk összessége a transzformációk inverzeit is tartalmazza.
- Az identikus transzformáció is eleme az összességnek.

A szóbanforgó összességre érvényesek az un. csoporttulajdonságok, ezért a transzformációk ezen összességét tranformációcsoportnak nevezzük.

A geometriai leképezésre most tehát egy konkrét példát mutatunk be, melyről kimutatjuk, hogy tranformáció, és ezen transzformáció segítségével fogjuk vizsgálni néhány geometriai alakzat tulajdonságait.

Értelmezés: Geometriai alakzaton pontok, egyenesek és síkok meghatározott összességét értjük.

Tengelyes tükrözés

Legyen az A ponthalmaz egy sík pontjainak halmaza. A sík minden egyes pontjához rendeljük hozzá ugyanezen sík valamely pontját a következő eljárással: Vegyünk fel a síkon egy tetszőleges t egyenest, és a sík tetszőleges P pontjához a P-ből a t-re bocsátott merőlegesnek azt a P-től különböző P' pontját rendeljük, amelynek t-től való távolsága egyenlő P-nek t-től való távolságával; míg a t minden egyes pontjához önmagát rendeljük.

A sík minden egyes pontjához hozzárendeltük ugyanezen sík egy pontját a leírt eljárással, tehát geometriai leképezést értelmeztünk, amit egyenesre vonatkozó tükrözésnek, vagy tengelyes tükrözésnek nevezünk.
Jele: T_t .
P eredeti pont, P' képpont, t a tükrözés tengelye.
A leképezés értelmezési tartománya a sík pontjainak halmaza.
Könnyen belátható, hogy a sík bármely pontja képpont is. Tudniillik az a pont, amely a t-től ugyanakkora távolságra van, mint a szóbanforgó pont, de tőle különbözik. A tengely pontjai pedig önmaguk képei.
A leképezés értékkészlete tehát a sík pontjainak halmaza.

A tengelyes tükrözés tehát a síknak önmagára történő geometriai leképezése.

A tengelyes tükrözés tulajdonságai:

1. A tengelyes tükrözés transzformáció.
2. A tengely pontjai mind fixpontok, más fixpontja nincs a tengelyes tükrözésnek.
3. Ha P nem illeszkedik a tengelyre ($P \notin t$), akkor a tengely a P-t a P'-től elválasztja. A tengelyes tükrözés a tengely által meghatározott félsíkokat felcseréli.
4. Ha P képe P', akkor P' képe P. Tehát képpontokhoz az eredeti pontokat ugyanazon t-re vonatkozó tükrözés rendeli. A tengelyes tükrözés inverze ugyenezen tengelyes tükrözés.
5. Egyenes tükörképe egyenes.
   a/ Ha e_1 metszi a tengelyt, ugyanott metszi azt a képe is (fixpont).
   b/ Ha e párhuzamos t-vel, akkor képe párhuzamos e-vel és t-vel.
6. A tengelyre merőleges egyenesek invariánsak, invariáns (pontonként fixegyenes) még a tengely is.

A felsoroltakon kívül más invariáns egyenese nincs a tengelyes tükrözésnek.

7. A tengelyre merőleges egyeneseknek nincs közös pontjuk.
8. Szakasz képe szakasz, méréssel megállpíthatjuk, hogy a szakasz és képe egyenlő hosszúságú. (Ezt majd úgy fejezzük ki, hogy a tükrözés szakasztartó.)

9. Szög képe szög, méréssel megállapíthatjuk, hogy a szög és a szög képe egyenlő nagyságú. (A tükrözés szögtartó.)
10. A tengelyes tükrözésnél az alakzat és képe körüljárási iránya ellentétes.
11. Két egyenes metszéspontjának képe a két képegyenes metszéspontja.

Megjegyzés: 1. A tengelyes tükrözésnél az alakzat és képe síkbeli mozgatással nem hozható fedésbe egymással, csak a tengely körüli térbeli átforgatással.

2. A temgelyes tükrözést a tengely vagy egy megfelelő (nem fix) pontpár meghatározza. A tengelyes tükörzés tulajdonságainak összegyűjtésekor a tanulók érdeklődésére is építve sikerült az általános fogalmaknak a konkrét megfelelőit megtalálni.

Ezután már természetesebbek, érthetőbbek lettek azok. A fogalmak mélyebb elsajátításához célszerűnek tűnt az is, hogy mutassunk meg a síkon olyan geometriai leképezést is, amely nem transzformáció. Például a síkon felvettünk egy egyenest, és a sík minden egyes pontjához hozzárendeltük a pontból az egyenesre bocsátott merőlegesnek az egyenessel való metszéspontját. E leképezés vizsgálata is jól mutatta, hogy a fenti általános fogalmak oktatása az I. gimnáziumiban nem okoz gondot.

A további tananyagot a háromszög, a trapéz, a téglalap, a négyzet, a deltoid és a rombusz előállításának és tulajdonságainak tengelyes tükrözéssel való vizsgálata képezte.

A mértani helyek tárgyalásakor is használtuk a tengelyes tükrözést. Mértani helynek a sík (tér) adott tulajdonságú pontjainak halmazát neveztük. Szerkesztési alapelemnek tekintettük a pontot, az egyenest és a kört, s kerestük az egy szerkesztési alapelemtől adott távolságra levő pontok mértani helyét, majd a két, illetve három szerkesztési alapelemtől egyenlő távolságra levő pontok mértani helyét. Közben kerestük az egy szerkesztési alapelemet érintő adott sugarú körök középpontjainak, illetve a két és három szerkesztési alapelemet érintő körök középpontjainak mértani helyét. Amellett, hogy ez a feldolgozás rendszerességre, teljességre szoktat, sok hasznát vettük később ennek a harmadik osztályban a koordinátageometria tárgyalásánál.

A továbbiakban a sík önmagára történő újabb leképezéseit értelmeztük.

A forgást két, egymást egy Q pontban metsző t_1 és t_2 tengelyre vonatkozó tükrözés összetételeként. Jele: $F = T_{t_1} T_{t_2}$. A forgás segítségével a szög, a kör, a középponti és kerületi szög, a Thales-tétel a húr-, és érintő négyszögek vizsgálata volt elvégezhető. A pontra vonatkozó tükrözés -- két, egymást egy Q pontban merőlegesen metsző t_1 és t_2 tengelyre vonatkozó tükrözés összetétele (Jele: T_O) -- a paralelogramma előállításában és tulajdonságainak vizsgálatában kapott szerepet. Ezzel vizsgáltuk a háromszögek, négyszögek középvonalait.

Az eltolás -- a párhuzamos t_1 és t_2 tengelyre vonatkozó tükrözés összetétele (Jele: $E = T_{t_1} T_{t_2}$) -- a paralelogrammák tulajdonságainak vizsgálatánál és két kör közös érintőinek vizsgálatánál játszott szerepet.

A fenti három transzformációt azért érdemes így értelmezni, mert ezek tulajdonságainak jó részét a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból közvetlenül is leovashatjuk.

A kettőnél több tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés összetételének vizsgálata érdekében a következő állítást igazoltuk. A tengelyes tükrözéseknek létezik olyan véges sorozata, amely egy adott "a" egyenes által meghatározott és előre kijelölt α_1 félsíkot és az "a"-ra illeszkedő adott A kezdőpontú adott a_1 félegyenest, az adott "b" egyenes által meghatározott és előre kijelölt β_1 félsíkba, és a "b"-re illeszkedő adott B kezdőpontú adott b_1 félegyenesbe visz át. A bizonyítás során kiderült, hogy ehhez legfeljebb három tengelyre történő tükrözés egymásutánjára van szükség. Az első tengely az AB szakasz felezőmerőlegese, a második az a_1^* és b_1 szögfelezője (ahol a_1^* az a_1 első tengelyre vonatkozó tükörképe), a harmadik pedig a b egyenes, ha egyáltalán ezekre esetenként szükség van. A tengelyes tükrözések olyan véges sorozatát, amely adott félsíkot, és a félsíkot meghatározó egyenes adott kezdőpontú adott félegyenesét ugyanilyen előre megadott alakzatba viszi át egybevágósági transzformációnak neveztük. Ennek alapján, ha a tükrözések véges sorozata egy tengelyre vonatkozó tükrözéssel helyettesíthető, akkor tengelyes tükrözés, ha két tengelyre vonatkozó tükrözéssel helyettesíthető, akkor forgás, pontra vonatkozó tükrözés vagy eltolás, ha három tengelyre vonatkozó tükrözéssel heyettesíthető, akkor csúsztatva tükrözés az egybevágósági transzformáció. (Ez utóbbi azért kapta ezt az elnevezést, mert három tengelyre vonatkozó tükrözés összetétele egy eltolás és egy tengelyes tükrözés összetételével helyettesíthető.)

Két geometriai alakzatot pedig akkor neveztünk egybevágónak, ha létezik olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.

Bebizonyítottuk a háromszögek egybevágóságára vonatkozó tételeket, vagyis adott feltételek mellett megmutattuk, hogy létezik olyan egybevágósági transzfromáció, amely egyik háromszöget a másikba átviszi. Sőt megmutattuk minden esetben, hogy melyek azok az egybevágósági transzformációk, amelyek az egyik háromszöget a másikba vitték.

Az első éves tananyag jelentős fogalma volt a vektor, amely a középiskolai tananyag további tárgyalásának nagyon fontos eszköze. Az eltolásnál a pont és képe úgynevezett eltolási nyilat határoz meg. Egy eltolás esetén ezek egyenlő hosszúságúak és egyező irányúak. Ha d-vel jelöljük a két párhuzamos tengely távolságát, akkor a leképezési nyilak hossza 2d. (Egy leképezési nyil az eltolást meghatározza.)

Az ugyanazon eltolást előíró (meghatározó) eltolási nyilak összességét (halmazát) vektornak neveztük, s azt egy tetszőleges elemével adottnak tekintettük. A vektor tehát egy végtelen sok elemű halmaz, és bármelyik leképezési nyil reprezentálja. Persze végtelen sok eltolás lévén, a vektorok halmaza is végtelen sok elemű halmaz.

Mivel két eltolás összetétele eltolás, ezért két vektor összegén azon vektort értettük, amely a két összetevő eltolás eredő eltolását határozza meg. (Több, véges sok összeadandóra is értelmeztük a vektorok összeadását.)

Az eltolás segítségével értelmeztük az ellentett vektort, a nullavektort, a vektor számszorosát, számmal való osztását és az egységvektort. Vizsgáltuk a számmal való szorzás tulajdonságait. A térszemlélet idejében történő fejlesztése érdekében a síkra vonatkozó tükrözést is értelmeztük. Külön foglalkoztunk a két párhuzamos síkra történő tükrözés összetételével (a tér eltolása), amelynek segítségével bevezettük a térbeli vektor fogalmát. Nyilvánvaló, hogy értelmeztük a térbeli vektorok összeadását, számmal való szorzását és azok tulajdonságait is. (Ez zömében a síkbeli gondolat ismétlése.)

Végül a továbbtanulást maguk elé célul tűző tanulók számára a vektortér fogalmát is megadtuk.

Ha R a valós számok halmaza és V egy nem üres halmaz, akkor a V halmazt a valós számok feletti vektortérnek nevezzük, ha teljesülnek rá a következők.

I. A V halmazon értelmezve van az összeadás művelete és minden

$\underline{a}, \underline{b} \in V$ -re $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$;

minden $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ -re $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$;

a V-ben van olyan elem -- jelöljük $\underline{0}$ -val, hogy minden $\underline{a} \in V$ -re

$\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$;

a V halmaz minden $\underline{a} \in V$ elemmel együtt tartalmaz olyan $\underline{-a}$ -val jelölt elemet is, hogy

$$\underline{a} + (\underline{-a}) = \underline{0} .$$

II. Az R és V elemei között legyen értelmezve egy RXV leképezés.

Az $(\alpha, \underline{a})$ párhoz rendelt V-beli elemet jelöljük $\alpha . \underline{a}$ -val, $(\alpha \in R, \underline{a} \in V)$, és elvárjuk, hogy a leképezés teljesítse az alábbi tulajdonságokat: minden $\alpha, \beta \in R$ és $\underline{a} \in V$ esetén

$(\alpha \beta)\underline{a} = \alpha(\beta \underline{a})$;

minden $\underline{a} \in V$ -re $1 . \underline{a} = \underline{a}$;

az R-beli összeadásra legyen disztributív $(\alpha+\beta) \underline{a} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{a}$;

és a V-beli összeadásra legyen disztributív

Ezt skalárral való szorzásnak hívjuk. $\alpha(\underline{a}+\underline{b}) = \alpha \underline{a} + \alpha \underline{b}$.

Az általunk értelmezett vektorok halmaza e tulajdonságoknak eleget tesz, ezért a vektorok halmaza a valós számok feletti vektortér.

Megjegyzések:

Az egybevágósági transzformációk egységes szellemben történő tárgyalása a tanulók feladatmegoldó teljesítményét megnövelte. Érdekes volt tapasztalni, hogy az Arany Dániel versenyen olyan megoldást is adtak tanulóink, transzformáció segítségével az egyik feladatra, amely a megoldó kulcsban nem szerepelt. Jó szolgálatot tett a vektor fogalma a fizika oktatásában is.

Végül köszönetemet fejezem ki a Dobó István Gimnázium és Szakközépiskola vezetőinek a kísérlet lefolytatásának lehetőségéért és támogatásukért.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Az érvényben levő általános iskolai tanterv.
2. Az érvényben levő középiskolai tanterv.
3. A forgalomban levő általános iskolai tankönyvek.
4. A forgalomban levő középiskolai tankönyvek.
5. Dr. Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó 1960.
6. Dr. Pelle Béla: Geometria, Tankönyvkiadó 1974.
7. Dr. Cservenyák János: A geometria középiskolai szintű feldolgozása transzformációkkal és vektorokkal. Egyetemi doktori disszertáció 1977.